

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2010-11

Gian Paolo Leonardi

UN NUOVO APPROCCIO ALLE DISUGUAGLIANZE  
ISOPERIMETRICHE QUANTITATIVE

26 maggio 2011

## ABSTRACT

We introduce a new variational method for studying geometric and functional inequalities with quantitative terms. In the context of isoperimetric-type inequalities, this method (called *Selection Principle*) is based on a penalization technique combined with the regularity theory of quasiminimizers of the perimeter functional. In this seminar we present the method and describe two remarkable applications. The first one is a new proof of the sharp quantitative isoperimetric inequality in  $\mathbb{R}^n$ . The second one is the proof of a conjecture posed by Hall about the optimal constant in the quantitative isoperimetric inequality in  $\mathbb{R}^2$ , in the small asymmetry regime.

## SUNTO

Si introduce un nuovo metodo variazionale per lo studio di disuguaglianze geometriche e funzionali in forma quantitativa. Nell'ambito delle disuguaglianze di tipo isoperimetrico, tale metodo (detto *Principio di Selezione*) si basa su una tecnica di penalizzazione combinata con la teoria della regolarità per i quasiminimi del perimetro. In questo seminario verrà presentato il metodo assieme a due notevoli applicazioni. La prima consiste in una nuova dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica quantitativa con esponente sharp in  $\mathbb{R}^n$ . La seconda, invece, è la risposta affermativa ad una congettura di Hall sulla costante ottimale nella disuguaglianza isoperimetrica quantitativa in  $\mathbb{R}^2$ , nel regime delle piccole asimmetrie.

## 1. INTRODUZIONE

Sia  $E$  un insieme boreliano di  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Denotiamo con  $|E|$  la misura  $n$ -dimensionale di Lebesgue di  $E$  e, supponendo d'ora in poi  $0 < |E| < +\infty$ , indichiamo con  $B_E$  la palla euclidea aperta avente la stessa misura di  $E$ , ovvero  $|B_E| = |E|$ . Se la frontiera  $\partial E$  è di classe Lipschitz, denotiamo con  $P(E)$  il *perimetro* di  $E$  ovvero la misura  $n - 1$  dimensionale di  $\partial E$ . Una definizione più generale di perimetro, nel senso della teoria delle funzioni a variazione limitata, sarà richiamata in Sezione 2.

La disuguaglianza isoperimetrica classica in  $\mathbb{R}^n$  afferma che, a parità di misura  $n$ -dimensionale, la palla euclidea ha il minor perimetro:

$$(1) \quad P(E) \geq P(B_E) = n\omega_n^{\frac{1}{n}} |E|^{\frac{n-1}{n}},$$

dove  $\omega_n$  indica la misura  $n$ -dimensionale della palla unitaria. Inoltre,  $B_E$  è anche l'unico minimo del perimetro a volume fissato  $= |E|$ , a meno di traslazioni ed insiemi di misura nulla.

In questa breve nota si descrive un nuovo metodo per ottenere stime quantitative per la stabilità della palla nella disuguaglianza isoperimetrica (1). Prima di tutto si definisce il *deficit isoperimetrico* di  $E$

$$\delta(E) = \frac{P(E) - P(B_E)}{P(B_E)}$$

e l'*asimmetria* di  $E$

$$\alpha(E) = \inf \left\{ \frac{|E \triangle (x + B_E)|}{|E|}, x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Si noti come  $\delta(E)$  ed  $\alpha(E)$  siano invarianti per isometrie e dilatazioni; inoltre  $\alpha(E) \in [0, 2)$  e vale  $\alpha(E) = 0$  se e solo se  $E$  coincide essenzialmente con una palla. La (1) afferma equivalentemente che  $\delta(E) \geq 0$  e vale  $\delta(E) = 0$  se e solo se  $\alpha(E) = 0$ . È quindi sensato ricercare disuguaglianze nella forma  $\delta(E) \geq \varphi(\alpha(E))$ , per qualche funzione  $\varphi$  esplicita. Nella fattispecie, dimostreremo la cosiddetta *disuguaglianza isoperimetrica quantitativa con esponente sharp* in  $\mathbb{R}^n$

$$(2) \quad \delta(E) \geq C\alpha(E)^2, \quad C = C(n) > 0.$$

nonché, in  $\mathbb{R}^2$ , la medesima disuguaglianza con *costante ottimale asintotica*

$$(3) \quad \delta(E) \geq \frac{\pi}{8(4-\pi)} \alpha(E)^2 + o(\alpha(E)^2).$$

La (2), congetturata da Hall in [16] ed ivi dimostrata sotto ipotesi di simmetria assiale, è stata recentemente provata in [14] (si veda anche [12] per una dimostrazione alternativa, valida anche nel caso di perimetri anisotropi). Sempre in [16] si congettura inoltre che la (3) debba valere per tutti i boreliani di  $\mathbb{R}^2$ . Si tenga presente che in [18] e [17] la (3) era stata congetturata e quindi dimostrata per i convessi di  $\mathbb{R}^2$ .

Descriviamo ora sommariamente il contenuto delle successive sezioni. Dopo alcuni richiami e risultati preliminari in Sezione 2, illustreremo nella Sezione 3 il risultato principale del lavoro, ovvero il Principio di Selezione. Concluderemo quindi con la Sezione 4, nella quale descriveremo brevemente due notevoli applicazioni del Principio di Selezione: da un lato, una nuova dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica quantitativa in  $\mathbb{R}^n$ ; dall'altro, la dimostrazione della (3) ovvero la risposta affermativa alla seconda congettura di Hall.

## 2. DEFINIZIONI E RISULTATI PRELIMINARI

Dato un boreliano  $E \in \mathbb{R}^n$ , indichiamo con  $\chi_E$  la sua funzione caratteristica, quindi definiamo la convergenza  $L^1$  (o  $L^1_{\text{loc}}$ ) di una successione di insiemi boreliani  $E_j$  ad un insieme limite  $E$  come la convergenza  $L^1$  (o  $L^1_{\text{loc}}$ ) delle rispettive funzioni caratteristiche. Dato un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , definiamo *perimetro* di  $E$  in  $\Omega$  la quantità

$$P(E, \Omega) := \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} g(x) \, dx : g \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n), |g| \leq 1 \right\}.$$

Grazie al teorema di Gauss-Green, non è difficile mostrare che  $P(E, \Omega)$  coincide con l'usuale misura euclidea  $(n-1)$ -dimensionale di  $\partial E \cap \Omega$ , qualora  $\partial E$  sia di classe  $C^1$  o Lipschitz. Scriveremo semplicemente  $P(E)$  al posto di  $P(E, \mathbb{R}^n)$  e diremo che  $E$  è un insieme di perimetro finito se  $P(E) < +\infty$ . Si osservi che  $P(E, \Omega) < +\infty$  se e solo se la derivata distribuzionale  $D\chi_E$  è una misura di Radon vettoriale in  $\Omega$ , con variazione totale  $|D\chi_E|(\Omega) = P(E, \Omega)$  finita. Da noti risultati (si veda ad esempio [4]) si ha inoltre  $D\chi_E = \nu_E \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$ , dove  $\mathcal{H}^{n-1}$  è la misura di Hausdorff  $(n-1)$ -dimensionale e  $\partial^* E$  è

la *frontiera ridotta* di  $E$ , cioè l'insieme dei punti  $x \in \partial E$  per i quali è definita la *normale interna generalizzata*  $\nu_E(x)$ , ovvero

$$\nu_E(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{D\chi_E(B(x, r))}{|D\chi_E|(B(x, r))} \quad \text{e} \quad |\nu_E(x)| = 1.$$

Per maggiori dettagli sulla teoria dei perimetri e delle funzioni a variazione limitata, si vedano ad esempio [15], [11] e [4].

**2.1.  $\Lambda$ -minimi forti del perimetro.** Diciamo che un boreliano  $E \subset \mathbb{R}^n$  di perimetro localmente finito (ovvero finito sui compatti di  $\mathbb{R}^n$ ) è un  $\Lambda$ -*minimo forte* a scala  $R$  se esiste  $R > 0$  tale che, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  ed ogni  $0 < r < R$ , e per ogni fissata *variazione compatta*  $F$  di  $E$  in  $B(x, r)$  (cioè tale che  $E \triangle F \subset\subset B(x, r)$ ) si ha

$$P(E, B(x, r)) \leq P(F, B(x, r)) + \Lambda|E \triangle F|$$

(si veda ad es. [3]). I  $\Lambda$ -minimi forti e, più in generale, i *quasiminimi* del funzionale perimetro sono stati approfonditamente studiati adattando le tecniche di De Giorgi per la regolarità delle frontiere di perimetro minimo [10]. Ricordiamo a questo proposito i lavori di Massari [20] sulla regolarità delle frontiere con curvatura media prescritta (minimi del funzionale  $P(E) + \int_E h(x) dx$ ) e quelli di Tamanini sull'estensione della regolarità ai quasiminimi del perimetro ([21, 22]). È inoltre opportuno ricordare l'importante generalizzazione dovuta ad Almgren ([1]) della teoria della regolarità per quasiminimi di funzionali più generali del perimetro, nel contesto delle correnti e dei varifolds.

Nel seguente teorema si stabiliscono tre proprietà cruciali verificate da una generica sequenza di  $\Lambda$ -minimi *uniformi* che converge in  $L^1_{loc}$  ad un limite  $F$ . La dimostrazione di queste proprietà può essere dedotta dai risultati contenuti ad esempio in [22] e [3] (si veda [8] per maggiori dettagli).

**Teorema 2.1.** *Supponiamo che  $E_1, \dots, E_h, \dots$  formino una sequenza di  $\Lambda$ -minimi forti a scala  $R$ , per  $R, \Lambda > 0$  opportuni, tale che  $E_h$  converga in  $L^1_{loc}$  ad un boreliano  $F$ , per  $h \rightarrow \infty$ . Allora valgono i seguenti fatti.*

- (i)  $F$  è un  $\Lambda$ -minimo forte a scala  $R$ . Inoltre, se  $\partial F$  è limitata allora  $\partial E_h$  converge a  $\partial F$  nella metrica di Hausdorff.

- (ii)  $\partial^* F$  è una ipersuperficie  $(n-1)$ -dimensionale di classe  $C^{1,\gamma}$  per ogni  $\gamma \in (0, 1)$  (e in particolare  $C^{1,1}$  in dimensione  $n = 2$ ), mentre l'insieme singolare  $\partial F \setminus \partial^* F$  ha dimensione di Hausdorff  $\leq n - 8$ .
- (iii) Se  $\partial F$  è regolare e compatta (quindi la parte singolare di  $\partial F$  è vuota) allora esiste  $h_0$  tale che per ogni  $h \geq h_0$ ,  $\partial E_h$  è di classe  $C^{1,\gamma}$  per ogni  $0 < \gamma < 1$  ( $C^{1,1}$  se  $n = 2$ ). Inoltre possiamo rappresentare  $\partial E_h$  come il grafico (in direzione normale) di una funzione regolare  $u_h$  definita su  $\partial F$  e tale che  $u_h \rightarrow 0$  in  $C^1(\partial F)$ , quando  $h \rightarrow \infty$ .

### 3. IL PRINCIPIO DI SELEZIONE

Cominciamo con un'osservazione riguardante la disuguaglianza isoperimetrica, ed in particolare il caso di uguaglianza. Poiché i minimi del perimetro in  $\mathbb{R}^n$  con vincolo di volume sono necessariamente palle, ci aspettiamo che l'asimmetria  $\alpha(E)$  di un insieme  $E$  debba essere piccola se si assume che il deficit isoperimetrico  $\delta(E)$  sia sufficientemente piccolo. Vale cioè il seguente

**Lemma 3.1.** *Per ogni  $a > 0$  esiste  $\delta_a > 0$  tale che, dato  $E \in \mathcal{S}^n$ , se vale  $\delta(E) < \delta_a$  allora si ha  $\alpha(E) < a$ .*

Il precedente lemma afferma sostanzialmente la *continuità nello zero* dell'asimmetria in funzione del deficit isoperimetrico. Pur essendo abbastanza naturale ed intuitivo, tale risultato richiede una dimostrazione non del tutto banale che tipicamente procede per assurdo ed utilizza un argomento di compattezza per concentrazione (si veda a questo proposito [1] Lemma VI.15, oppure [14]).

Una conseguenza importante del Lemma 3.1 è il fatto di poter limitare la verifica della disuguaglianza isoperimetrica quantitativa (2) a insiemi aventi asimmetria minore di una fissata costante  $a_0 > 0$ . In altre parole, è sufficiente lavorare nel regime delle *piccole asimmetrie*: infatti, se viceversa si suppone  $\alpha(E) \geq a_0$ , per il Lemma 3.1 si ha  $\delta(E) \geq \delta_0$  e quindi ricordando che  $\alpha(E) < 2$  si ottiene  $\delta(E) \geq \frac{\delta_0}{4} \alpha^2(E)$ .

Introduciamo ora il funzionale  $Q : \mathcal{S}^n \rightarrow [0, +\infty]$  definito come

$$(4) \quad Q(E) = \inf \left\{ \liminf_k \frac{\delta(F_k)}{\alpha(F_k)^2} : (F_k)_k \subset \mathcal{S}^n, |F_k| = |E|, \alpha(F_k) > 0, |F_k \triangle E| \rightarrow 0 \right\}.$$

Il funzionale  $Q(E)$  coincide con l'involuppo semicontinuo inferiore del quoziente  $\frac{\delta(E)}{\alpha(E)^2}$  rispetto alla convergenza  $L^1$ . Grazie alla semicontinuità inferiore del perimetro e alla continuità dell'asimmetria rispetto a tale convergenza, si deduce facilmente che  $Q(E) = \frac{\delta(E)}{\alpha(E)^2}$  nel caso  $\alpha(E) > 0$ . Di fatto, l'estensione risulta significativa solo nel caso in cui  $E$  sia una palla: infatti il valore di  $Q(B)$  corrisponde alla *costante ottimale asintotica* per la (2), ovvero la più grande costante per cui vale la disuguaglianza

$$\delta(E) \geq Q(B)\alpha(E)^2 + o(\alpha(E)^2)$$

per ogni  $E \in \mathcal{S}^n$ . In altri termini,  $Q(B)$  è la costante ottimale per il regime delle piccole asimmetrie, il che in particolare rende valida la seguente

**Proposizione 3.2.** *La disuguaglianza isoperimetrica quantitativa con esponente sharp (2) equivale a*

$$(5) \quad Q(B) > 0.$$

Si aggiunga a questo che, come osservato in [16], selezionando un'opportuna sequenza di ellissoidi convergenti a  $B$  si può mostrare che  $Q(B) < +\infty$  (si veda anche [19]). Dalla definizione di  $Q(B)$  possiamo fissare una *recovery sequence* di insiemi  $(W_j)_j$ , tali che  $|W_j| = |B|$ ,  $0 < \alpha(W_j) \rightarrow 0$ , e per cui valga  $Q(B) = \lim_j Q(W_j)$ . Tuttavia, non è detto che gli insiemi  $W_j$  siano sufficientemente regolari per permetterci di stimare in maniera efficiente il valore di  $Q(B)$ . Uno strumento particolarmente efficace per semplificare il calcolo di  $Q(B)$  è dato dal seguente *Principio di Selezione*, che stabilisce l'esistenza di un'opportuna recovery sequence  $(E_j)_j$  per  $Q(B)$  verificante alcune importanti proprietà, fra cui la regolarità  $C^{1,\gamma}$ , la convergenza  $C^1$  alla palla ed una stima esplicita sull'oscillazione della curvatura media della frontiera.

**Teorema 3.3** (Principio di Selezione). *Esiste una successione  $(E_j)_j \subset \mathcal{S}^n$ , tale che*

- (i)  $|E_j| = |B|$ ,  $0 < \alpha(E_j) \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ ;
- (ii)  $Q(E_j) \rightarrow Q(B)$  quando  $j \rightarrow \infty$ ;
- (iii) *per ogni  $j$  sufficientemente grande esiste  $u_j \in C^1(\partial B)$  tale che  $\partial E_j = \{(1 + u_j(x))x : x \in \partial B\}$  e  $u_j \rightarrow 0$  in norma  $C^1$ , quando  $j \rightarrow \infty$ ;*

(iv)  $\partial E_j$  ha curvatura media  $H_j \in L^\infty(\partial E_j)$  e si ha  $\|H_j - 1\|_{L^\infty(\partial E_j)} \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ .

*Sketch della dimostrazione.* Descriviamo qui brevemente le idee cruciali che intervengono nella dimostrazione del Teorema 3.3. Fissiamo innanzi tutto una generica *recovery sequence*  $(W_j)_j$  per  $Q(B)$  verificante  $|W_j| = |B|$  e  $\alpha(W_j) \downarrow 0$ , quindi poniamo  $\varepsilon_j = \alpha(W_j)$ . A questo punto definiamo la successione di *funzionali penalizzati*  $(Q_j)_j : \mathcal{S}^n \rightarrow [0, +\infty)$  come segue:

$$(6) \quad Q_j(E) = Q(E) + \left( \frac{\alpha(E)}{\varepsilon_j} - 1 \right)^2.$$

La dimostrazione procede per vari risultati intermedi, qui schematizzati in una serie di passi.

*Passo 1.* Si dimostra l'esistenza di un minimo  $E_j$  per il funzionale  $Q_j$ . La tecnica utilizzata prende spunto dalle idee contenute nel Lemma VI.15 in [1] e consiste essenzialmente in un procedimento di tipo compattezza per concentrazione, mediante il quale una successione minimizzante per  $Q_j$  che eventualmente “perda massa all'infinito”, ovvero converga in  $L^1_{loc}$  ma non in  $L^1$  ad un insieme limite, viene modificata in una nuova successione minimizzante che, a differenza della precedente, converga effettivamente in  $L^1$  ad un limite  $E_j$ . Tale insieme limite soddisfa il vincolo di volume  $|E_j| = |B|$  e, per le proprietà di semicontinuit  inferiore di  $Q_j$  rispetto alla convergenza  $L^1$ , verifica  $Q_j(E_j) = \inf Q_j$ .

A questo punto si osserva che necessariamente  $\alpha(E_j) > 0$  per  $j$  sufficientemente grande. Infatti, a priori non possiamo escludere che  $E_j = B$  per un generico  $j$ , tuttavia se indichiamo con  $(F_h^j)_h$  una successione minimizzante per  $Q_j$  e se ricordiamo che  $0 \leq Q(B) < +\infty$ , avremmo nell'ipotesi assurda  $F_h^j \rightarrow B$  in  $L^1$  (ovvero  $\alpha(F_h^j) \rightarrow 0$ ) la conseguenza

$$Q(W_j) \geq \liminf_h Q_j(F_h^j) \geq Q(B) + 1 > Q_j(W_j) = Q(W_j),$$

dove la disuguaglianza stretta (e quindi l'assurdo) si ha a patto di scegliere  $j$  sufficientemente grande, in maniera tale che  $Q(W_j) \simeq Q(B)$ . In conclusione,  $(F_h^j)_h$  non pu  tendere a  $B$ , e quindi  $\alpha(E_j) > 0$  per  $j$  abbastanza grande. Quindi, dalla disuguaglianza

$$Q_j(E_j) \leq Q_j(W_j) = Q(W_j)$$



si deduce facilmente che

$$\lim_j Q_j(E_j) = \lim_j Q(E_j) = Q(B)$$

e infine

$$\alpha(E_j) = \varepsilon_j + o(\varepsilon_j).$$

*Passo 2.* La successione  $(E_j)_j$  trovata al passo 1 è costituita da  $\Lambda$ -minimi uniformi del perimetro. Per la dimostrazione di questa proprietà si utilizza la minimalità di  $E_j$  nel confronto con un competitore  $F$  ottenuto perturbando  $E_j$  all'interno di una generica palla di raggio  $\frac{1}{2}$ . Senza entrare nei dettagli dei conti, per cui si rimanda a [8], osserviamo che  $Q_j$  è essenzialmente costituito dal funzionale perimetro più termini regolari dipendenti dall'asimmetria. D'altra parte, l'asimmetria è a sua volta una funzione Lipschitziana rispetto alla distanza  $L^1$  tra insiemi, come implicato dal seguente lemma:

**Lemma 3.4.** *Sia  $E \in \mathcal{S}^n$  con  $|E| = |B| = \omega_n$ . Per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  ed ogni  $F \in \mathcal{S}^n$  verificante  $E \triangle F \subset\subset B(x, \frac{1}{2})$ , si ha*

$$|\alpha(E) - \alpha(F)| \leq \frac{2^{n+2}}{(2^n - 1)\omega_n} |E \triangle F|.$$

Quindi è piuttosto naturale aspettarsi che  $E_j$  sia un quasiminimo del perimetro con termine di errore proporzionale alla misura della differenza simmetrica (in altre parole, un  $\Lambda$ -minimo forte del perimetro). Infine, si riesce a dimostrare che la costante  $\Lambda$  non dipende da  $j$  ma solo dalla dimensione  $n$  (si veda [9] per una dimostrazione di quasiminimalità valida per una classe di funzionali con termini di perimetro e di asimmetria).

*Passo 3.* Grazie al passo precedente e al Teorema 2.1 si deduce che, per  $j$  sufficientemente grande,  $E_j$  ha frontiera regolare di classe  $C^{1,\gamma}$  ed è  $C^1$ -vicino alla palla  $B$ , anche a meno di una traslazione che sposti il baricentro di  $E_j$  nell'origine. Possiamo quindi dedurre ulteriori informazioni su  $\partial E_j$  dalla seguente *disuguaglianza variazionale*: per  $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi ogni  $x, y \in \partial E_j$  si ha

$$(7) \quad |H_j(x) - H_j(y)| \leq \frac{4n}{n-1} \left( Q(E_j)\alpha(E_j) + \frac{\alpha(E_j)^2}{\alpha(W_j)^2} |\alpha(E_j) - \alpha(W_j)| \right),$$

dove con  $H_j(z)$  si indica la curvatura media (in senso debole) di  $\partial E_j$  nel punto  $z \in \partial E_j$ . La dimostrazione della (7) si basa su una tecnica di gonfiaggio-sgonfiaggio del minimo  $E_j$  in corrispondenza di due fissati punti  $x, y \in \partial E_j$  ed in dipendenza di un parametro  $t > 0$ . Con tale tecnica si produce un competitore  $E_{j,t}$  avente lo stesso volume di  $E_j$  e tale per cui  $E_{j,0} = E_j$ . Tenendo conto della stima Lipschitziana

$$|\alpha(E_{j,t}) - \alpha(E_j)| \leq \frac{2t}{\omega_n},$$

e del fatto che, supponendo  $x$  punto di gonfiaggio e  $y$  punto di sgonfiaggio, si ha

$$\frac{d}{dt}P(E_{j,t})|_{t=0} = (n-1)[H_j(x) - H_j(y)],$$

dalla disuguaglianza di minimalità  $Q_j(E_j) \leq Q_j(E_{j,t})$  e con calcoli elementari si arriva abbastanza facilmente a dimostrare la (7).

Inoltre si osserva che, qualora  $\alpha(E_{j,t}) = \alpha(E_j)$  per  $t$  sufficientemente piccolo, e per ciascuna delle due possibilità di gonfiaggio-sgonfiaggio in  $x$  e  $y$ , il secondo membro della (7) si annulla, ovvero si ha  $H_j(x) = H_j(y)$  (come avviene per i minimi del perimetro a volume costante). Più in generale, se consideriamo l'unione  $\mathcal{C}_j$  delle *sfere ottimali*  $z + \partial B$ , dove  $z$  è appunto un *centro ottimale*, cioè verificante

$$\alpha(E_j) = \frac{|E_j \triangle (z + B)|}{|B|},$$

otteniamo che  $\mathcal{C}_j$  è un compatto e vale la seguente

**Proposizione 3.5.** *Per ogni componente connessa  $A$  di  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}_j$ ,  $\partial E_j \cap A$  è un'ipersuperficie a curvatura media costante (con costante a priori dipendente da  $A$ ).*

La prova della Proposizione 3.5 si basa sull'osservazione per cui la procedura di gonfiaggio-sgonfiaggio opportunamente localizzata in  $A$  non modifica l'asimmetria di  $E_j$ .

Infine, tenendo conto che il secondo membro della (7) tende a zero e che  $E_j \rightarrow B$  in  $L^1$  quando  $j \rightarrow \infty$ , si ricava la convergenza in norma  $L^\infty$  della curvatura media scalare di  $\partial E_j$  alla curvatura media costante ( $= 1$ ) della sfera unitaria  $\partial B$ .

In conclusione, il Teorema 3.3 risulta così dimostrato. □

## 4. DUE APPLICAZIONI DEL PRINCIPIO DI SELEZIONE

## 4.1. Una nuova dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica quantitativa.

Come prima applicazione del Principio di Selezione vediamo qui di seguito una nuova dimostrazione della disuguaglianza (2). A questo scopo combineremo il Teorema 3.3 con il seguente risultato dimostrato da Fuglede in [13] mediante sviluppo in armoniche sferiche:

**Teorema 4.1** (disuguaglianza di Fuglede). *Esistono due costanti dimensionali  $C_F, \varepsilon_F > 0$  tali che se  $E$  ha il baricentro nell'origine e la sua frontiera si rappresenta come*

$$(8) \quad \partial E = \{x(1 + u(x)) : x \in \partial B\} \quad \text{con} \quad u \in C^1(\partial B), \quad \|u\|_{C^1} \leq \varepsilon_F,$$

*allora*

$$(9) \quad \delta(E) \geq C_F \|u\|_{W^{1,2}(\partial B)}^2.$$

Per la dimostrazione del Teorema 4.1 si veda anche [8]. Ricordiamo che gli insiemi verificanti la (8) sono detti *quasi-sferici*.

Siamo ora in grado di provare la disuguaglianza isoperimetrica quantitativa (2). Infatti, tenendo presente la Proposizione 3.2 possiamo limitarci a verificare la (5) per gli insiemi  $E_j$  del Principio di Selezione, i quali per  $j$  sufficientemente grande risultano quasi-sferici nel senso di Fuglede. Di conseguenza, per essi vale il Teorema 4.1 e quindi la (9), da cui in particolare

$$(10) \quad \delta(E_j) \geq C_F \|u_j\|_2^2,$$

dove  $\|\cdot\|_2$  denota la norma  $L^2(\partial B)$ . Con un'applicazione delle disuguaglianze di Bernoulli e di Hölder, possiamo determinare due costanti dimensionali positive  $c_0$  e  $c_1$ , tali che

$$(11) \quad \begin{aligned} \alpha(E_j)^2 \leq 4|E_j \setminus B|^2 &\leq c_0 \left( \int_{\partial B \cap (E \setminus B)} (1 + u_j)^n - 1 d\mathcal{H}^{n-1} \right)^2 \\ &\leq c_0 n^2 \left( \int_{\partial B} |u_j| d\mathcal{H}^{n-1} \right)^2 \leq c_1 \|u_j\|_2^2, \end{aligned}$$

Infine, (10) e (11) implicano che per ogni  $j$  sufficientemente grande si ha

$$Q(E_j) \geq C > 0$$

con  $C = \frac{C_E}{c_1} > 0$ . Passando al limite in  $j$  e ricordando che  $Q(E_j) \rightarrow Q(B)$  quando  $j \rightarrow \infty$  si ottiene appunto  $Q(B) \geq C$  ovvero la (5), da cui per la Proposizione 3.2 si ha immediatamente la (2).

**4.2. La congettura di Hall nel piano.** Grazie al Principio di Selezione è possibile dare una dimostrazione diretta della (3), ovvero che in dimensione  $n = 2$  vale

$$(12) \quad Q(B) = \frac{\pi}{8(4 - \pi)}.$$

Ciò costituisce una generalizzazione di risultati precedenti dovuti a Hall, Hayman e Weitsman ([18, 17, 16]), Campi ([7]) e Alvino, Ferone e Nitsch ([2]). Per maggiori dettagli sull'argomento ed ulteriori risultati, si veda [9]. A questo scopo, osserviamo che la successione  $E_j$  del Teorema 3.3 è costituita da insiemi la cui frontiera è di classe  $C^{1,1}$  ed ha la curvatura vicina a 1 (dunque positiva) per  $j$  sufficientemente grande. Di conseguenza, possiamo supporre  $E_j$  *strettamente convesso*. D'altra parte, vale il seguente risultato:

**Lemma 4.2.** *Sia  $E$  un insieme strettamente convesso in  $\mathbb{R}^n$ . Allora esiste un unico  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tale che  $|E \triangle (x_0 + B_E)| = |E|\alpha(E)$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esistano  $x_0 \neq x_1$  per cui  $|E \triangle (x_i + B_E)| = |E|\alpha(E)$  quando  $i = 0, 1$ , ovvero

$$(13) \quad |E \cap (x_i + B)| = |B| \left( 1 - \frac{\alpha(E)}{2} \right) \quad i = 0, 1.$$

Fissato  $\lambda \in [0, 1]$  poniamo  $x_\lambda = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1$  e osserviamo che

$$E \cap (x_\lambda + B) \supseteq \lambda (E \cap (x_0 + B)) + (1 - \lambda) (E \cap (x_1 + B)).$$

Poiché  $E \cap (x_\lambda + B)$  è convesso, per la disuguaglianza di Brunn-Minkowski ([6]) e grazie alla (13) otteniamo

$$\begin{aligned} |E \cap (x_\lambda + B)|^{\frac{1}{n}} &\geq |\lambda (E \cap (x_0 + B)) + (1 - \lambda) (E \cap (x_1 + B))|^{\frac{1}{n}} \\ &\geq \lambda |E \cap (x_0 + B)|^{\frac{1}{n}} + (1 - \lambda) |E \cap (x_1 + B)|^{\frac{1}{n}} \\ &= |B|^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{\alpha(E)}{2} \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Da ciò segue che  $|E \cap (x_\lambda + B)| \geq |B|(1 - \frac{\alpha(E)}{2})$ . Per come è definita l'asimmetria, vale anche la disuguaglianza opposta, cioè  $|E \cap (x_\lambda + B)| = |B|(1 - \frac{\alpha(E)}{2})$ . Di conseguenza vale l'uguaglianza nella disuguaglianza di Brunn-Minkowski, per cui  $E \cap (x_\lambda + B)$  coincide con  $E \cap (x_0 + B)$  a meno di traslazione e per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ . Ma allora  $\partial E \cap (x_\lambda + B)$  è piatta nella direzione del vettore  $x_1 - x_0$ , il che contraddice l'ipotesi di stretta convessità di  $E$ .  $\square$

Possiamo quindi applicare la Proposizione 3.5 e dedurre che  $\partial E_j \cap B$  (e, rispettivamente,

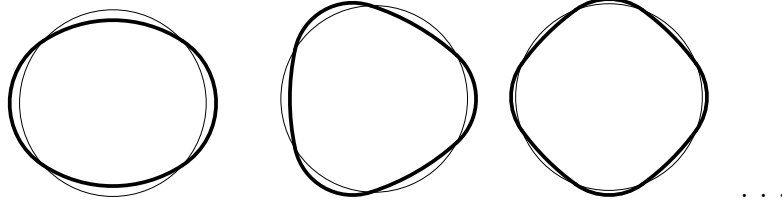


FIGURA 1. Una particolare famiglia di insiemi. Il primo a sinistra è detto *ovale*.

$\partial E_j \setminus B$ ) è costituita da una unione finita di archi di circonferenza aventi la medesima curvatura. A questo punto è facile dedurre che  $E_j$  appartiene alla particolare famiglia di insiemi rappresentati in Figura 1. Successivamente, si applica la *simmetrizzazione anulare* introdotta da Bonnesen in [5] (vedi Figura 2) agli insiemi della famiglia di cui sopra, osservando che la simmetrizzazione conserva le proprietà di regolarità ed in particolare la convessità di tali insiemi. Ciò permette di dimostrare che gli insiemi  $E_j$  sono necessariamente gli *ovali* già determinati in [7] (vedi Figura 1). Infine descrivendo in forma

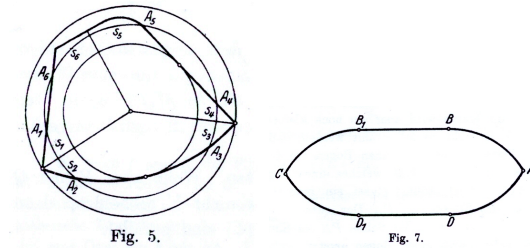


FIGURA 2. La simmetrizzazione anulare di Bonnesen.

parametrica gli ovali è possibile calcolare esplicitamente il loro deficit isoperimetrico e la

loro asimmetria, da cui con un calcolo piuttosto laborioso ma nella sostanza elementare si ottiene la (12) e, conseguentemente, la (3).

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] F. J. ALMGREN, JR., *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem. Amer. Math. Soc., 4 (1976), pp. viii+199.
- [2] A. ALVINO, V. FERONE, AND C. NITSCH, *A sharp isoperimetric inequality in the plane*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 13 (2011), pp. 185–206.
- [3] L. AMBROSIO, *Corso introduttivo alla teoria geometrica della misura ed alle superfici minime*, Appunti dei Corsi Tenuti da Docenti della Scuola. [Notes of Courses Given by Teachers at the School], Scuola Normale Superiore, Pisa, 1997.
- [4] L. AMBROSIO, N. FUSCO, AND D. PALLARA, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [5] T. BONNESEN, *Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren*, Math. Ann., 91 (1924), pp. 252–268.
- [6] Y. D. BURAGO AND V. A. ZALGALLER, *Geometric inequalities*, vol. 285 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics.
- [7] S. CAMPI, *Isoperimetric deficit and convex plane sets of maximum translative discrepancy*, Geom. Dedicata, 43 (1992), pp. 71–81.
- [8] M. CICALESE AND G. P. LEONARDI, *A selection principle for the sharp quantitative isoperimetric inequality*, preprint, (2010).
- [9] ———, *Best constants for the isoperimetric inequality in quantitative form*, preprint, (2011).
- [10] E. DE GIORGI, *Frontiere orientate di misura minima*, Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960-61, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1961.
- [11] L. C. EVANS AND R. F. GARIEPY, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [12] A. FIGALLI, F. MAGGI, AND A. PRATELLI, *A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities*, Invent. Math., 182 (2010), pp. 167–211.
- [13] B. FUGLEDE, *Stability in the isoperimetric problem*, Bull. London Math. Soc., 18 (1986), pp. 599–605.
- [14] N. FUSCO, F. MAGGI, AND A. PRATELLI, *The sharp quantitative isoperimetric inequality*, Ann. of Math. (2), 168 (2008), pp. 941–980.
- [15] E. GIUSTI, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, vol. 80 of Monographs in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

- [16] R. R. HALL, *A quantitative isoperimetric inequality in  $n$ -dimensional space*, J. Reine Angew. Math., 428 (1992), pp. 161–176.
- [17] R. R. HALL AND W. K. HAYMAN, *A problem in the theory of subordination*, J. Anal. Math., 60 (1993), pp. 99–111.
- [18] R. R. HALL, W. K. HAYMAN, AND A. W. WEITSMAN, *On asymmetry and capacity*, J. Anal. Math., 56 (1991), pp. 87–123.
- [19] F. MAGGI, *Some methods for studying stability in isoperimetric type problems*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 45 (2008), pp. 367–408.
- [20] U. MASSARI, *Esistenza e regolarità delle ipersuperfici di curvatura media assegnata in  $R^n$* , Arch. Rational Mech. Anal., 55 (1974), pp. 357–382.
- [21] I. TAMANINI, *Boundaries of Caccioppoli sets with Hölder-continuous normal vector*, J. Reine Angew. Math., 334 (1982), pp. 27–39.
- [22] ———, *Regularity results for almost minimal oriented hypersurfaces in  $R^n$* , Quaderni del Dipartimento di Matematica dell' Università di Lecce, 1 (1984), pp. 1–92.